

## Zusammenfassung

### Dissertationstitel:

*“Conditional limit theorems for multitype branching processes and illustration in epidemiological risk analysis”*

Diese Arbeit befasst sich mit der Frage des Aussterbens von Populationen verschiedener Typen von Individuen. Uns interessiert das Verhalten vor dem Aussterben sowie insbesondere im Falle eines sehr späten Aussterbens. Wir untersuchen diese Fragestellung zum einen von einer rein wahrscheinlichkeitstheoretischen Sicht und zum anderen vom Standpunkt der Risikoanalyse aus, welche im Zusammenhang mit dem Aussterben eines bestimmten Modells der Populationsdynamik steht. In diesem Kontext schlagen wir mehrere statistische Werkzeuge vor.

Die Populationsgröße wird entweder durch einen zeitkontinuierlichen mehrtyp-Bienaymé-Galton-Watson Verzweigungsprozess (BGWc) oder durch sein Analogon mit kontinuierlichem Zustandsraum, den Feller Diffusionsprozess, modelliert. Wir interessieren uns für die unterschiedlichen Arten auf Überleben zu bedingen sowie für die hierbei auftretenden Gleichgewichtszustände. Diese Bedingungen wurden bereits weitreichend im Falle eines einzelnen Typen studiert. Im Kontext von mehrtyp-Verzweigungsprozessen hingegen ist die Literatur weniger umfangreich und es gibt keine systematischen Arbeiten, welche die Ergebnisse von BGWc Prozessen mit denen der Feller Diffusionsprozesse verbinden. Wir versuchen hiermit diese Lücke zu schliessen.

Im ersten Teil dieser Arbeit untersuchen wir das Verhalten von Populationen vor ihrem Aussterben, indem wir das zeitasymptotische Verhalten des auf Überleben bedingten zugehörigen Verzweigungsprozesses  $(X_t|X_t \neq 0)_t$  betrachten (oder allgemeiner auf Überleben in naher Zukunft  $0 \leq \theta < \infty$ ,  $(X_t|X_{t+\theta} \neq 0)_t$ ). Wir beweisen das Ergebnis, neuartig im mehrtypen Rahmen und für  $\theta > 0$ , dass dieser Grenzwert existiert und nicht-degeneriert ist. Dies spiegelt ein stationäres Verhalten für auf Überleben bedingte Bevölkerungsdynamiken wider und liefert eine Verallgemeinerung des sogenannten Yaglom Grenzwertes (welcher dem Fall  $\theta = 0$  entspricht). In einem zweiten Schritt studieren wir das Verhalten der Populationen im Falle eines sehr späten Aussterbens, welches wir durch den Grenzübergang auf  $\theta \rightarrow \infty$  erhalten. Der resultierende Grenzwertprozess ist ein bekanntes Objekt im eintypen Fall (oftmals als  $Q$ -Prozess bezeichnet) und wurde ebenfalls im Fall von mehrtyp-Feller-Diffusionsprozessen studiert. Wir untersuchen den bisher nicht betrachteten Fall, in dem  $X_t$  ein mehrtyp-BGWc Prozess ist und beweisen die Existenz des zugehörigen  $Q$ -Prozesses. Darüber hinaus untersuchen wir seine Eigenschaften einschließlich der asymptotischen und weisen auf mehrere Auslegungen hin. Schließlich interessieren wir uns für die Austauschbarkeit der Grenzwerte in  $t$  und  $\theta$ , und die Vertauschbarkeit dieser Grenzwerte in Bezug auf die Beziehung zwischen BGWc und Feller Prozessen. Wir beweisen die Durchführbarkeit aller möglichen Grenzwertvertauschungen (Langzeitverhalten, wachsende Aussterbeverzögerung, Diffusionslimit).

Der zweite Teil dieser Arbeit ist der Risikoanalyse in Bezug auf das Aussterben und das sehr späte Aussterben von Populationen gewidmet. Wir untersuchen ein Modell einer verzweigten Bevölkerung (welches vor allem im epidemiologischen Rahmen erscheint), für welche ein Parameter der Reproduktionsverteilung unbekannt ist. Wir konstruieren Schätzer, die an die jeweiligen Stufen der Evolution adaptiert sind (Wachstumsphase, Verfallphase sowie die Verfallphase, wenn das Aussterben sehr spät erwartet wird), und beweisen zudem deren asymptotische Eigenschaften (Konsistenz, Normalverteiltheit). Im Besonderen bauen wir einen für  $Q$ -Prozesse adaptierten kleinste-Quadrate-Schätzer, der eine Vorhersage der Bevölkerungsentwicklung im Fall eines sehr späten Aussterbens erlaubt. Dies entspricht dem Best- oder Worst-Case-Szenario, abhängig davon, ob die Bevölkerung bedroht oder invasiv ist. Diese Instrumente ermöglichen uns die Betrachtung der Aussterbensphase der Bovinen spongiformen Enzephalopathie Epidemie in Großbritannien. Wir schätzen den Infektionsparameter in Bezug auf mögliche bestehende Quellen der horizontalen Infektion nach der Beseitigung des primären Infektionsweges (Tiermehl) im Jahr 1988. Dies ermöglicht uns eine Vorhersage des Verlaufes der Krankheit inklusive des Jahres des Aussterbens, der Anzahl von zukünftigen Fällen sowie der Anzahl infizierter Tiere. Insbesondere ermöglicht es uns die Erstellung einer sehr detaillierten Analyse des Epidemieverlaufs im unwahrscheinlichen Fall eines sehr späten Aussterbens.